

Käsittele 10 tehtävää.

- a) Kirjoita seuraava lause luonnollisella kielellä ilman implikaatiota ("jos" on kielletty):  
*Jos on kylmä, hän käyttää hattua.*

b) Kirjoita seuraavan lauseen *negaatio* luonnollisella kielellä mahdollisimman yksinkertaisesti: *Jos sataa lunta, he eivät aja autoa.*  
*Vihje:* Kannattaa varmaan käyttää apuna formalisointia.
- Ekvivalenssi voidaan määritellä negaation ja implikaation avulla:  
 $p \Leftrightarrow q =_{df} (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg(\neg q \Rightarrow p)$   
 Todista tämä **a)** totuustaulukon avulla ja **b)** muokkaamalla määritelmän vasenta ja oikeata puolta lauselogiikan tautologioiden avulla.
- Osoita induktiolla, että luku  $n^3 + 20n$  on jaollinen 3:lla kaikilla  $n \in \mathbf{N}$ .
- Lukujono määritellään rekursiivisesti ehdoilla  $f_{n+1} = -2f_n + 1$ ,  $f_0 = 3$ . Laske kuusi ensimmäistä lukujonon lukua. Osoita induktiolla, että lukujonon luvut voidaan laskea kaavalla  $f_n = (1/3) \cdot (1 + 8 \cdot (-2)^n)$ .
- Osoita, että seuraavat kolme ehtoa ovat yhtäpitäviä:  
 $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$
- Joukkojen A ja B *symmetrinen erotus*  $A + B$  on joukko, jonka alkiot kuuluvat joko A:han tai B:hen, muttei molempiin. Piirrä symmetristä erotusta kuvaava Venn-diagrammi. Miten *määrittelisit* symmetrisen erotuksen? Entä miten esittäisit sen muiden joukko-opin operaatioiden avulla? Keksitkö useampia esityksiä? Osoita ne yhtäpitäviksi.
- Tutki seuraavia luonnollisten lukujen joukossa määriteltyjä relaatioita:  
 S:  $x$  on suurempi kuin  $y$     T:  $x \cdot y$  on kokonaisluvun neliö  
 U:  $x + y = 10$                       V:  $x + 4 \cdot y = 10$   
 Mainitse kustakin relaatiosta pari esimerkkiä.  
 Mitkä relaatioista ovat a) refleksiivisiä, b) symmetrisiä, c) antisymmetrisiä, d) transitiivisia?
- Olkoon  $A = \mathbf{Z}_+ \cup \mathbf{Z}_-$  (siis kokonaisluvut paitsi nolla). Määritellään relaatio  $\sim$  joukossa  $A \times A$  seuraavasti:  
 $(a, b) \sim (c, d)$ , jos  $a \cdot d = b \cdot c$ .  
 Esimerkiksi  $(2, 3) \sim (10, 15) \sim (-6, -9)$  jne.  
 Osoita, että relaatio on ekvivalenssirelaatio.  
 (Kyse on murtoluvun eri esitysmuodoista. Murtoluvut on siis tässä esitetty pareina (*osoittaja, nimittäjä*).)
- Tutkitaan kuvauksia  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 2]$ . a) Muodosta jokin kuvaus, joka on *injektio*, mutta ei *surjektio*. b) Muodosta jokin kuvaus, joka on *surjektio*, mutta ei *injektio*. c) Muodosta jokin kuvaus, joka on *bijektio*.
- Käytettävissä on äärellinen määrä merkkejä (aakkoset) M. *Lause* L on äärellisen pituinen jono joukon M merkkejä. Onko kaikkien mahdollisten lauseiden lukumäärä numeroituva vai ylinumeroituva? *Kieli* K koostuu siihen kuuluvista mahdollisista lauseista. Onko kaikkien mahdollisten kielten lukumäärä numeroituva vai ylinumeroituva? Millä eri tavoin voit perustella vastauksesi?
- Todista, että mielivaltaisessa 8 kokonaisluvun joukossa on aina vähintään kaksi lukua, joiden erotus on jaollinen 7:llä. Yritä soveltaa kurssilla esiteltyjä menetelmiä.
- Eräässä kerhossa on 8 jäsentä. Kuinka monella tavalla kerholle voidaan valita  
**a)** puheenjohtaja, sihteeri ja rahastonhoitaja,  
**b)** kolmihenkinen johtokunta,  
**c)** kolmihenkinen johtokunta ja kaksihenkinen huvitoimikunta?